

[home](#)へ

## MDCT 計算シートの使い方

MP3窓関数とOgg窓関数での計算シートを作成しました。  
こちらの[Excelシート](#)をご使用ください。(LZH形式)

入力できる信号(数値)は32個で、セルC28～C59に原信号の数値を入力すると、D28～D59に逆変換後の数値が出力されます。

E28～E59は原信号と逆変換後の信号の誤差( $E^{**}=C^{**}-D^{**}$ )です。これは円周率(D3)の精度を良くすると小さくなっていきます。

## How to use MDCT calculation sheet with Excel

I made two sheets of MP3 window function and ogg's one.  
Please use [this Excel sheet](#)(LZH file).

You can input only 32 points of the signal in the sheet. If you input numerical data as original signal in C28-C59 , you will get inversed MDCT signal in D28-D59.

Each E28-E59 is the difference of the two signals ( $E^{**}=C^{**}-D^{**}$ ) , which is smaller as dicimal places of pi (D3 in Excel) is more increased.



## 適応ブロックサイズMDCT

以下ではMDCTの窓関数の時間軸の範囲(window size)が可変の場合の窓関数の条件を求めます。

原論文 IEICE Vol.E77-A, No.5 pp.894-899 May,1994  
[Perfect Reconstruction Conditions for Adaptive Blocksize MDCT](#)  
 Takashi MOCHIZUKI

前記6.よりMDCT公式は下記のとおり書くことができる。  
 (記号付けは原論文となるべく一致させています。またあとでわかりやすくするために下記では(A)~(K)、(7)'、(7)''の記号を付けています。)

$$X_A(k) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{i=0}^{2M_A-1} h_A(i) x_A(i) \cos\left(\frac{\pi}{M_A} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(i + \frac{M_A + 1}{2}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, M_A - 1 \quad (1)$$

$$y_A(i) = \sqrt{\frac{2}{M_A}} \sum_{k=0}^{M_A-1} f_A(i) X_A(k) \cos\left(\frac{\pi}{M_A} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(i + \frac{M_A + 1}{2}\right)\right)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, 2M_A - 1 \quad (2)$$

ここで  $x_A(i)$  はブロック入力信号、 $X_A(k)$  は変換係数、 $y_A(i)$  は逆変換された信号、 $h_A(i)$  は分析窓、 $f_A(i)$  は統合窓である。  
 $2M_A$  は入力信号数で変換後  $M_A$  個の係数に変換される。また  $M_A$  個の係数は逆変換によって  $2M_A$  個の信号に変換される。  
 以下では  $h_A(i)$  と  $f_A(i)$  は変換が完全再鋳を満たすためにある条件を満たさなければならないことを示す。

(これは完全再構築のための条件のしわよせを窓関数に押し込めた、ということでしょう)

考察を進める前に式 (1)  $X_A(k)$  を 式 (2)  $y_A(i)$  に代入してみよう。

$$y_A(i) = x_A(i)h_A(i)f_A(i) - x_A(M_A - 1 - i)h_A(M_A - 1 - i)f_A(i)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, M_A - 1 \quad (3)$$

$$= x_A(i)h_A(i)f_A(i) + x_A(3M_A - 1 - i)h_A(3M_A - 1 - i)f_A(i)$$

$$i = M_A, \dots, 2M_A - 1 \quad (4)$$

右辺第1項は2つとも入力信号と分析窓、統合窓の積である。第2項はそれからずれることを示すエイリアシング項である。したがって完全再構築を満たすためには、第1項が原信号を再現し、第2項は0となればよい。

完全再構築のための条件:  $M_B \leq M_A$  の場合

図1(a)に示すように時間軸のある点 $n_0$ を起点として互いに重ならない窓関数A, B, Cの範囲を考える。(この場合は  $M_C \leq M_B \leq M_A$  )

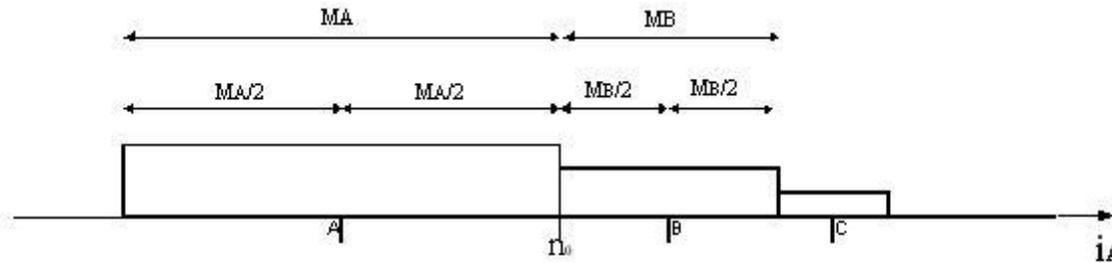


図1(a)

次にそれぞれの範囲を2倍に拡大し、図1(b)に示すようにAとBの重なり合う領域をそれぞれ領域 I、II、IIIとする。

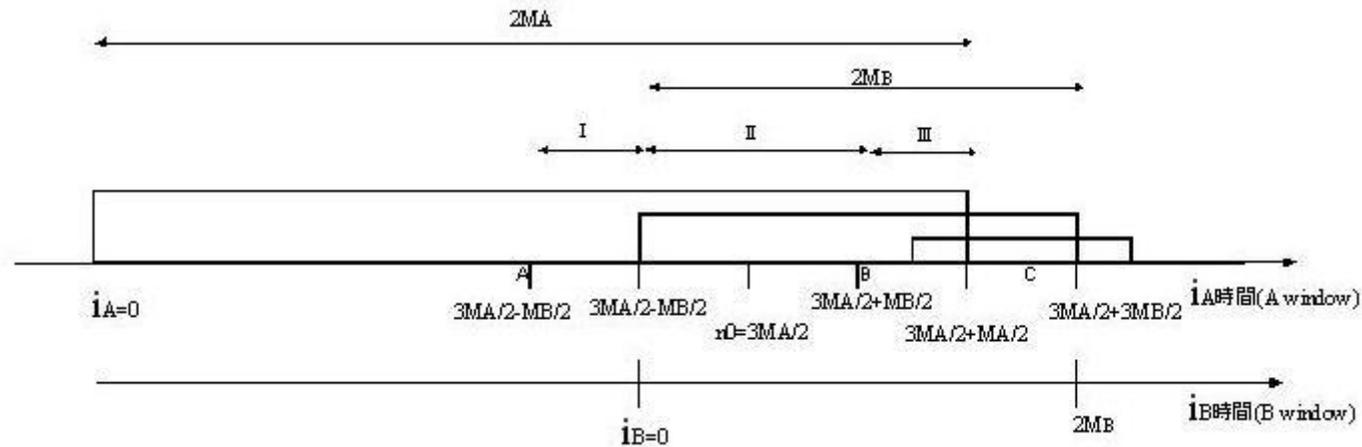


図1(b)

ここでCとAおよびCとBの重なりは考慮に入れないが、これはMDCTの元々の定義が隣り合う窓Aの後半部分と窓Bの前半部分で発生するエイリアシングによる打消しによる完全再鋳を前提にしているためである。したがって窓Aの後半部分と窓Bの前半部分の重なり合いのみを考察する。

またそれぞれの窓関数の始まる時間を起点と考えた時間軸を導入する。すなわち窓Aについての  $i_A$  時間軸、窓Bについての  $i_B$  時間軸を導入する。

**領域 I**

この領域ではブロックAでの逆変換信号のみしか存在しないため、 $y_A$  のみ考慮すればよい。 $i_A$  の範囲は

$$n_0 - \frac{M_A}{2} \leq i_A \leq n_0 - \frac{M_B}{2} - 1 \quad (5)$$

すなわち

$$M_A \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} - 1$$

また式(4) より

$$x_A(i_A)h_A(i_A)f_A(i_A) = x_A(i_A) \quad (6)$$

$$x_A(3M_A - 1 - i)h_A(3M_A - 1 - i)f_A(i) = 0 \quad (7)$$

したがって式(6)より

$$h_A(i_A)f_A(i_A) = 1(A) \quad (8)$$

また式(7)より

$$h_A(i_A) = 0(B)$$

$$\frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq 2M_A - 1 \quad (9)$$

( $\because$  式(8)より  $f_A(i_A) \neq 0$ )

### 領域 II

この領域ではブロックAとBの両方の逆変換信号が存在するため、 $y_A$  および  $y_B$  を考慮する必要がある。

$i_A$  の範囲は

$$\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} - 1$$

また逆変換された信号は

$$\begin{aligned} & y_A(i_A) + y_B(i_B) \\ &= x_A(i_A)h_A(i_A)f_A(i_A) + x_A(3M_A - 1 - i_A)h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) \\ &+ x_B(i_B)h_B(i_B)f_B(i_B) - x_B(M_B - 1 - i_B)h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) \\ & \quad (x_A(3M_A - 1 - i_A) = x_B(M_B - 1 - i_B), i_B = i_A - (\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_A(i_A)(h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2})f_B(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2})) + x_A(3M_A - 1 - i_A)(h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) \\
&\quad - h_B(\frac{M_B}{2} - 1 + \frac{3M_A}{2} - i_A)f_B(\frac{M_B}{2} - \frac{3M_B}{2} - \frac{3M_A}{2} + i_A)) \quad (10)
\end{aligned}$$

上式が  $x_A(i_A)$  に一致する必要があるため、

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2})f_B(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2}) = 1(C) \quad (11)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) - h_B(\frac{M_B}{2} - 1 + \frac{3M_A}{2} - i_A)f_B(\frac{M_B}{2} - \frac{3M_B}{2} - \frac{3M_A}{2} + i_A) = 0(D) \quad (12)$$

### 領域Ⅲ

この領域は窓Aの後半部分と窓Bの後半部分が重なり合っている部分で、MDCTエイリアシング打ち消しの前提条件（窓Aの後半部分と窓Bの前半部分の重なり合い）とは異なっている。

したがって一般的に窓Aと窓Bのエイリアシングが打ち消されるとは限らない。そのため  $y_A(i_A)$  は常に0である必要がある。

$i_A$  の範囲は

$$\frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq 2M_A - 1 \quad (13)$$

また

$$\begin{aligned}
y_A(i_A) &= x_A(i_A)h_A(i_A)f_A(i_A) + x_A(3M_A - 1 - i_A)h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) \\
&= 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

したがって

$$h_A(i_A)f_A(i_A) = 0 \quad (15)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) = 0 \quad (16)$$

$$(M_A \leq 3M_A - 1 - i_A \leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} - 1) \quad (17)$$

式(15) は条件(B)によって満たされる。

また式(A)の制約

$$\begin{aligned} h_A(i_j) &\neq 0 \\ M_A \leq i_j &\leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} - 1 \end{aligned} \quad (18)$$

より

$$\begin{aligned} h_A(3M_A - 1 - i_A) &\neq 0 \\ M_A \leq 3M_A - 1 - i_A &\leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} - 1 \end{aligned} \quad (19)$$

であるから、式(17) より

$$f_A(i_A) = 0 \quad (20)$$

である必要がある。したがって

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = 0(E) \quad (21)$$

完全再構築のための条件:  $M_A = M_B$  の場合

$M_A = M_B$  の場合は領域 I、III はなくなり、領域 II の条件のみ考慮すればよい。

したがって上の  $M_B \leq M_A$  の場合で  $M_A = M_B$  とし

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_A - M_A)f_B(i_A - M_A) = 1(F) \quad (22)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) = h_B(2M_A - 1 - i_A)f_B(i_A - M_A)(G) \quad (23)$$

$$M_A \leq i_A \leq 2M_A - 1$$

完全再構築のための条件:  $M_A < M_B$  の場合

$M_A < M_B$  の場合は、下図2(a)(b)のとおりとなる。

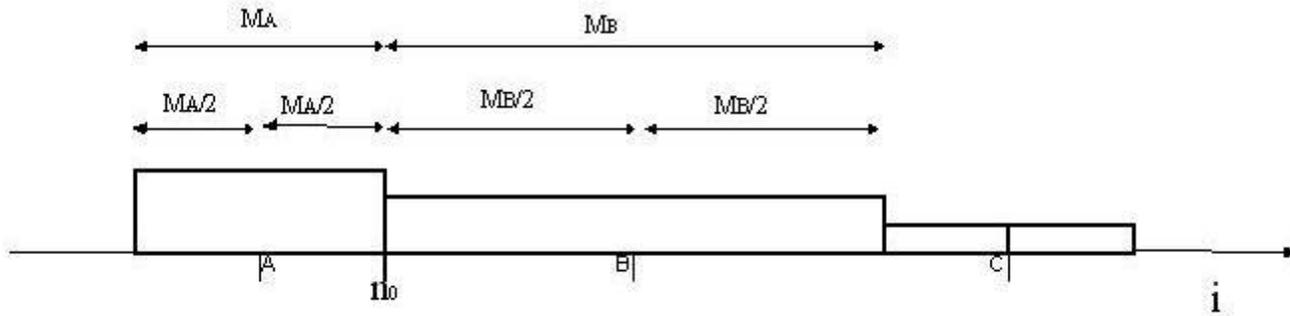


図2(a)

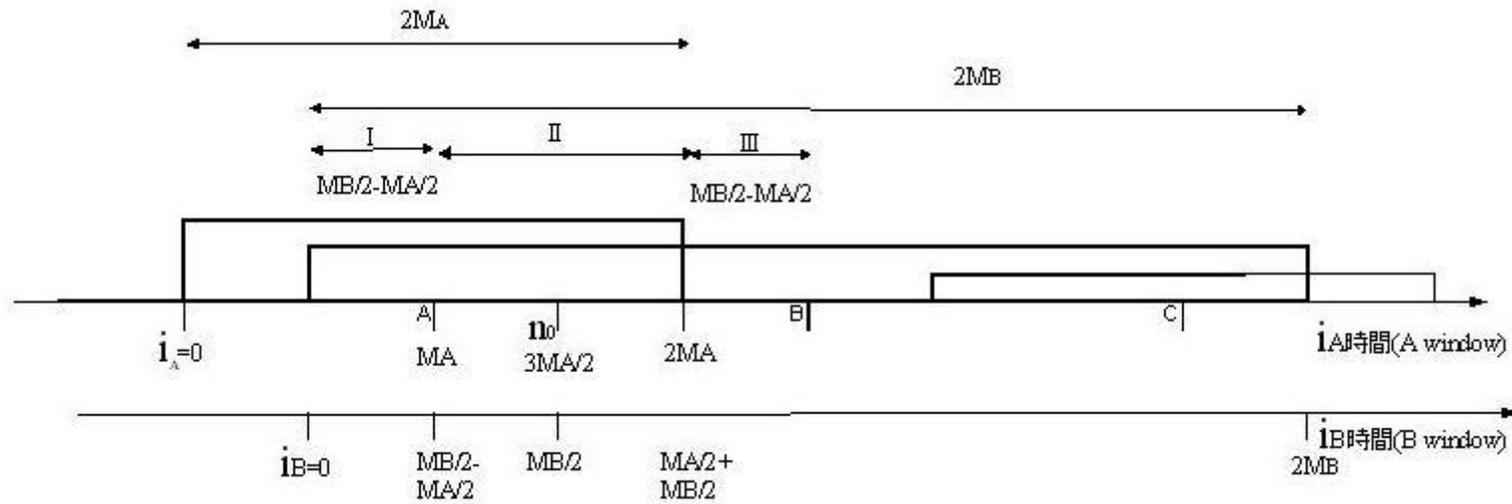


図2(b)

このとき変換後の信号  $y_B(i_B), y_A(i_A)$  が満たすべき条件式は以下のとおりである。

領域 I では

$$0 \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} - 1$$

$$y_B(i_B) = 0 \quad (22)$$

$$y_A(i_A) = x_A(i_A) \quad (23)$$

ここで

$$i_A - \left( \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} \right) = i_B \quad (24)$$

(22)より

$$y_B(i_B) = x_B(i_B)h_B(i_B)f_B(i_B) - x_B(M_B - 1 - i_B)h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) = 0$$

ゆえに

$$h_B(i_B)f_B(i_B) = 0(5)'$$

$$h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) = 0(5)''$$

したがって

$$f_B(i_B) = 0(H) \quad (25)$$

$$h_B(i_B) = 0(H) \quad (26)$$

(∵ 下記(7)より)

領域 II では

$$\frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} + \frac{M_A}{2} - 1 \quad (27)$$

$$y_A(i_A) + y_B(i_B) = x_A(i_A) \quad (28)$$

(28)より

$$y_A(i_A) + y_B(i_B) = x_A(i_A)h_A(i_A)f_A(i_A) + x_A(3M_A - 1 - i_A)h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A)$$

$$+ x_B(i_B)h_B(i_B)f_B(i_B) - x_B(M_B - 1 - i_B)h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B)$$

$$(x_B(i_B) = x_A(i_A), x_B(M_B - 1 - i_B) = x_A(3M_A - 1 - i_A))$$

$$= x_A(i_A)(h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_B)f_B(i_B))$$

$$+ x_A(3M_A - 1 - i_A)(h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) - h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B))$$

また

$$\begin{aligned}
 i_A |_{i_A=M_A} &= i_B |_{i_B=\frac{M_B}{2}-\frac{M_A}{2}} & (29) \\
 i_A |_{i_A=2M_A-1} &= i_B |_{i_B=\frac{M_A}{2}+\frac{M_B}{2}-1} \\
 M_A &\leq i_A \leq 2M_A - 1 \\
 \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} &\leq i_B \leq \frac{M_A}{2} + \frac{M_B}{2} - 1
 \end{aligned}$$

であり  $y_A(i_A) + y_B(i_B)$  が  $x_A(i_A)$  に等しくなるためには

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_B)f_B(i_B) = 1 \quad (I) \quad (30)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) - h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) = 0 \quad (J) \quad (31)$$

(ちなみに上式を  $i_A$  時間で表現すると、 $i_B = i_A - (\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2}) - 1$  より

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_A - (\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2}))f_B(i_A - (\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2})) = 1 \quad (I) \quad (32)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) - h_B(\frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} - 1 - i_A)f_B(i_A - (\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2})) = 0 \quad (J) \quad (33)$$

)

領域Ⅲでは

$$\begin{aligned}
 \frac{M_A}{2} + \frac{M_B}{2} &\leq i_B \leq M_B - 1 \\
 2M_A &\leq i_A \leq 2M_A + \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} \\
 y_B(i_B) &= x_B(i_B) & (34)
 \end{aligned}$$

である必要がある。

(34)より

$$x_B(i_B)h_B(i_B)f_B(i_B) - x_B(M_B - 1 - i_B)h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) = x_B(i_B) \quad (35)$$

である必要から

$$h_B(i_B)f_B(i_B) = 1 \quad (36)$$

ゆえに

$$h_B(i_B) \neq 0, f_B(i_B) \neq 0 \quad (7)'(K) \quad (37)$$

また

$$h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) = 0 \quad (7)''$$

$$\frac{M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_B \leq M_B - 1$$

したがって

$$h_B(i_j) = 0$$

$$0 \leq i_j \leq \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} - 1 \quad (38)$$

であるが、これは領域 I の条件に含まれている。

窓関数の条件のまとめ:(A)~(K)

【  $M_B < M_A$  の場合 】

領域 I

$$M_A \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} - 1$$

$$h_A(i_A)f_A(i_A) = 1(A)$$

$$\frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq 2M_A - 1(B)$$

領域 II

$$\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} - 1$$

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2})f_B(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2}) = 1(C)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) - h_B(\frac{M_B}{2} - 1 + \frac{3M_A}{2} - i_A)f_B(\frac{M_B}{2} - \frac{3M_B}{2} - \frac{3M_A}{2} + i_A) = 0(D)$$

領域 III

$$\frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq 2M_A - 1$$

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = 0(E)$$

【 $M_B = M_A$ の場合】

$$M_A \leq i_A \leq 2M_A - 1$$

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_A - M_A)f_B(i_A - M_A) = 1(F)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) = h_B(2M_A - 1 - i_A)f_B(i_A - M_A)(G)$$

【 $M_A < M_B$ の場合】

領域 I

$$0 \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} - 1$$

$$f_B(i_B) = h_B(i_B) = 0(H)$$

領域 II

$$\frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} + \frac{M_A}{2} - 1$$

$$h_A(i_A)f_A(i_A) + h_B(i_B)f_B(i_B) = 1(I)$$

$$h_A(3M_A - 1 - i_A)f_A(i_A) - h_B(M_B - 1 - i_B)f_B(i_B) = 0(J)$$

領域 III

$$h_B(i_B)f_B(i_B) = 1(K)$$

$$\frac{M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_B \leq M_B - 1$$

---

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

## 窓Aと窓Bの相対的な大きさが決まる場合の窓関数

前記8. 適応ブロックサイズMDCTでの条件(A)～(K)を満たす具体的な窓関数の式を表記します。

窓の大きさ  $M_A > M_B$  の場合

領域 I :

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = 1 \quad M_A \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} - 1 \quad (1)$$

→条件(A)を満たす。

$$h_A(i_A) = 0 \quad \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq 2M_A - 1 \quad (2)$$

→条件(B)を満たす。

領域 II :

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = \sin\left(\frac{\pi}{2M_B}\left(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{3M_B}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (3)$$

$$\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} - 1 \quad \text{または} \quad 0 \leq i_B \leq M_B - 1 \quad (\because i_B = i_A - \left(\frac{3M_A}{2} - \frac{M_B}{2}\right)) \quad (4)$$

→条件(C)を満たす。

隣接する窓の大きさで形状が決まる場合

$$h_B(i_B) = f_B(i_B) = \sin\left(\frac{\pi}{2M_B}\left(i_B + \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2M_B}\left(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5)$$

→条件(D)を満たす。

領域Ⅲ:

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = 0 \quad \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_A \leq 2M_A - 1 \quad (6)$$

→条件(E)を満たす。

窓の大きさ  $M_A = M_B$  の場合

上記  $M_A > M_B$  の場合の領域Ⅱのみを考慮すればよい。したがって

$$\begin{aligned} h_A(i_A) = f_A(i_A) &= \sin\left(\frac{\pi}{2M_A}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) & M_A \leq i_A \leq 2M_A - 1 \\ h_B(i_B) = f_B(i_B) &= \sin\left(\frac{\pi}{2M_B}\left(i_B + \frac{1}{2}\right)\right) & 0 \leq i_B \leq M_B - 1 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで  $M_A = M_B = M$  とすると

$$\begin{aligned} h_A(i_A) = f_A(i_A) &= \sin\left(\frac{\pi}{2M}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) & M \leq i_A \leq 2M - 1 \\ h_B(i_B) = f_B(i_B) &= \sin\left(\frac{\pi}{2M}\left(i_B + \frac{1}{2}\right)\right) & 0 \leq i_B \leq M - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

隣接する窓の大きさで形状が決まる場合

窓の大きさ  $M_A \leq M_B$  の場合

領域 I :

$$h_B(i_B) = f_B(i_B) = 0 \quad 0 \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} - 1 \quad (9)$$

→条件(H)を満たす。(  $h_A(i_A), f_A(i_A)$  は  $M_A > M_B$  の場合の窓Bを参照)

領域 II :

$$\begin{aligned} h_A(i_A) = f_A(i_A) &= \sin\left(\frac{\pi}{2M_A}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) & M_A \leq i_A \leq 2M_A - 1 \\ h_B(i_B) = f_B(i_B) &= \sin\left(\frac{\pi}{2M_A}\left(i_B - \frac{M_B}{2} + \frac{M_A}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) & \frac{M_B}{2} - \frac{M_A}{2} \leq i_B \leq \frac{M_A}{2} + \frac{M_B}{2} - 1 \\ & & (i_B = i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{M_B}{2}) \end{aligned} \quad (10)$$

→条件(I),(J)を満たす

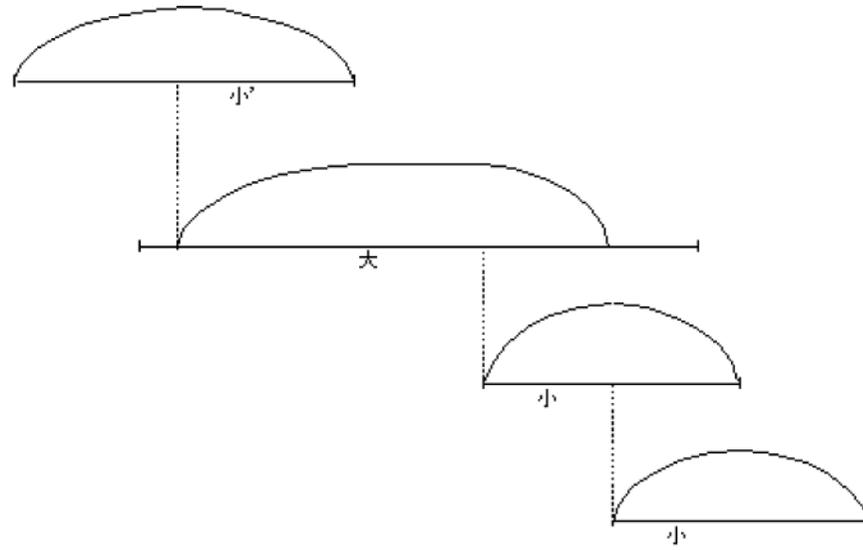
領域 III :

$$h_B(i_B) = f_A(i_A) = 1 \quad \frac{M_A}{2} + \frac{M_B}{2} \leq i_B \leq M_B - 1 \quad (11)$$

→条件(K)を満たす

すなわち窓関数は下記のようにあり、隣接する窓の大きさによって形状は決まる。

可変窓関数の例



大(平らな1の部分がある窓)が2つ続くことはない

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

## 最小窓Mminを決めている場合

前記9では隣接する窓によってその窓の大きさが決まる場合について述べました。これが可能なのは、最後まで信号の内容がわかっており、どの時間においても最適な窓を選択できる場合です。

これに対してライブのようにその場ですぐ処理することが必要な場合は最小の大きさの窓  $M_{min}$  とそれ以外の窓の場合を定義し、処理することが考えられます。具体的には、前記9の窓関数の式で下記のような設定を加えればよいです。(この場合も窓関数は条件 (A) ~ (K) を満たす)

最小窓の大きさを  $M_{min}$  とする。

$M_A > M_B$  の場合は  $M_B = M_{min}$  (大きい窓が時間的に前にある場合)として

$$\begin{aligned}
 h_A(i_A) = f_A(i_A) = & \quad 1 & \quad M_A \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_{min}}{2} - 1 \\
 & \sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_A - \frac{3M_A}{2} + \frac{3M_B}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) & \quad \frac{3M_A}{2} - \frac{M_{min}}{2} \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} + \frac{M_{min}}{2} - 1 \\
 & \quad 0 & \quad \frac{3M_A}{2} + \frac{M_{min}}{2} \leq i_A \leq 2M_A - 1 \\
 h_B(i_B) = f_B(i_B) = & \sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_B + \frac{1}{2}\right)\right) & \quad 0 \leq i_B \leq M_B - 1
 \end{aligned}$$

$M_A = M_B = M_{min}$  の場合は

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = \sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) \quad M_{min} \leq i_A \leq 2M_{min} - 1$$

$$h_B(i_B) = f_B(i_B) = \sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_B + \frac{1}{2}\right)\right) \quad 0 \leq i_B \leq M_{min} - 1$$

$M_A < M_B$  の場合は  $M_A = M_{min}$  (大きい窓が時間的に後ろにある場合)として

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = \sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) \quad M_{min} \leq i_A \leq 2M_{min} - 1$$

$$h_B(i_B) = f_B(i_B) = 0 \quad 0 \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} - \frac{M_{min}}{2} - 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_B - \frac{M_B}{2} + \frac{M_A}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \frac{M_B}{2} - \frac{M_{min}}{2} \leq i_B \leq \frac{M_B}{2} + \frac{M_{min}}{2} - 1$$

$$1 \quad \frac{M_B}{2} + \frac{M_{min}}{2} \leq i_B \leq M_B - 1$$

上式が条件であるが、 $M_{min}$  以外の場合の窓の形状をはっきりさせるために上で  $M_A > M_B (= M_{min})$  の場合の  $M_A$  の後半、 $M_B > M_A (= M_{min})$  の場合の  $M_B$  の前半部分をつないでいく。(この窓は  $M_{min}$  との接続が可能ことは明らかである) このとき以下のとおりとなる。

$$h_A(i_A) = f_A(i_A) = 0 \quad 0 \leq i_A \leq \frac{M_A}{2} - \frac{M_{min}}{2} - 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \frac{M_A}{2} - \frac{M_{min}}{2} \leq i_A \leq \frac{M_A}{2} + \frac{M_{min}}{2} - 1$$

$$1 \quad \frac{M_A}{2} + \frac{M_{min}}{2} \leq i_A \leq M_A - 1$$

(以上 (N) より)

1

$$\sin\left(\frac{\pi}{2M_{min}}\left(i_A + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

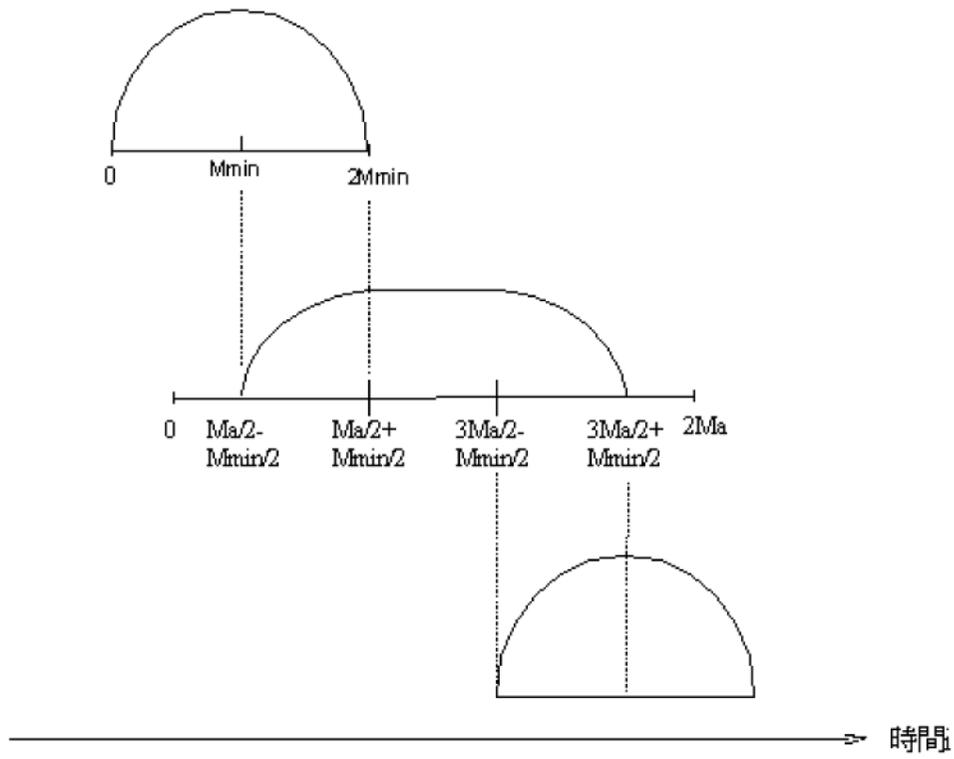
$$M_A \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} - \frac{M_{min}}{2} - 1$$

$$\frac{3M_A}{2} - \frac{M_{min}}{2} \leq i_A \leq \frac{3M_A}{2} + \frac{M_{min}}{2} - 1$$

$$\frac{3M_A}{2} + \frac{M_{min}}{2} \leq i_A \leq 2M_A - 1$$

(以上(L)より)

窓関数の形状



Next Up Previous

## フーリエ級数展開

任意の関数  $f(x)$  (区間  $-L \leq x \leq L$ ) は三角関数  $\sin k_n x, \cos k_n x$  または  $e^{ik_n x}$  ( $k_n = \frac{\pi n}{L}$ ) の和で表すことができます。これをフーリエ級数展開と呼びMDCTでも使用しています。(正確にはMDCTはフーリエ級数そのままではなく、あのように変換を定義して窓関数の条件を決めたら元の信号が再現できます、ということでしたが。)

下記でフーリエ級数展開の表示を導きます。(以下は必要条件のみ考慮しており本当の証明になっていませんが。。。)

任意の関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad (1)$$

と表されると仮定し、 $I$  を次のようにおく。

$$I = \int_{-L}^L |f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}|^2 dx \quad (2)$$

このとき

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L}^L \{f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}\} \{f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}\}^* dx \quad (3) \\ &= \int_{-L}^L dx \{f(x)f(x)^* - f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\frac{\pi}{L}x} - f(x)^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} + \\ &\quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_l c_m^* e^{i(l-m)\frac{\pi}{L}x} \quad (4) \end{aligned}$$

$I$  が最小となる  $c_n$  は

$$\frac{\partial I}{\partial c_n} = 0 \quad (5)$$

より

$$2Lc_n^* = \int_{-L}^L f(x)^* e^{in\frac{\pi}{L}x} dx \quad (6)$$

したがって

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \quad (7)$$

周期が  $-\infty \leq x \leq \infty$  の一般的な関数の場合は以下ようになります。

## フーリエ積分変換

上記結果より

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \quad (9)$$

$$(\Delta\omega := \frac{\pi}{L}) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta\omega \int_{-L}^L f(x) e^{-in\Delta\omega x} dx \quad (11)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad (12)$$

(13)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Delta\omega x}$$

$L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , また  $n\Delta\omega$  は連続変数となるから

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Delta\omega x} \quad (14)$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta\omega \int_{-L}^L f(t) e^{-in\Delta\omega t} dt e^{in\Delta\omega x} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \Delta\omega \int_{-L}^L f(t) e^{-in\Delta\omega t} dt e^{in\Delta\omega x} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (17)$$

上記式をオイラーの公式で  $\sin k_n x, \cos k_n x$  に分解すると、三角関数での表示を得ることができる。

上記の導出は必要条件しか考慮されておらず、物理数学的にも証明にはなっていませんが、自分もその証明は理解していませんので、省略させていただきます。他の参考書を参照ください。

参考書  
 物理数学ノートI 高橋 康著 講談社サイエンティフィック 2700円+税  
 実際に必要になった場面での数学をまとめてあるため、うまくまとめられていると思います。

画像数学入門 改訂版 氏原、田島、波田、福井、福田 共著 東洋書店 3200円+税  
 三角関数表示でのフーリエ級数について詳しい。

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

## フーリエ級数の収束の証明

ここでは前回導出したフーリエ級数がもとの関数  $f(x)$  に収束することを証明します。ただしフーリエ級数は  $f(x)$  の不連続点の両側で  $f(x)$  に収束しない点  $x$  が存在しますので(ギブスの現象)、ここでは区分的に滑らかな関数について証明します。

証明に必要な次の言葉の定義を確認します。

### 区分的に連続

区間  $[a, b]$  において、有限個の不連続点  $x = d_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を除いた各区間内で  $f(x)$  は連続で、各  $d_i$  で  $f(x)$  の極限值  $f(d_i \pm 0)$  が存在すること

### 区分的になめらか

区間  $[a, b]$  において、有限個の不連続点  $x = d_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を除いた各区間内で  $f'(x)$  は連続で、各  $d_i$  で  $f'(x)$  の極限值  $f'(d_i \pm 0)$  が存在すること

### フーリエ級数の収束

区分的に滑らかなフーリエ級数(周期  $2L$ )は

(1)  $f(x)$  が連続である点  $x_i$  では  $f(x)$  は  $f(x_i)$  に収束

(2)  $f(x)$  が不連続な点  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  では  $f(x_i)$  の両側の極限値の相加平均へ収束

すなわち

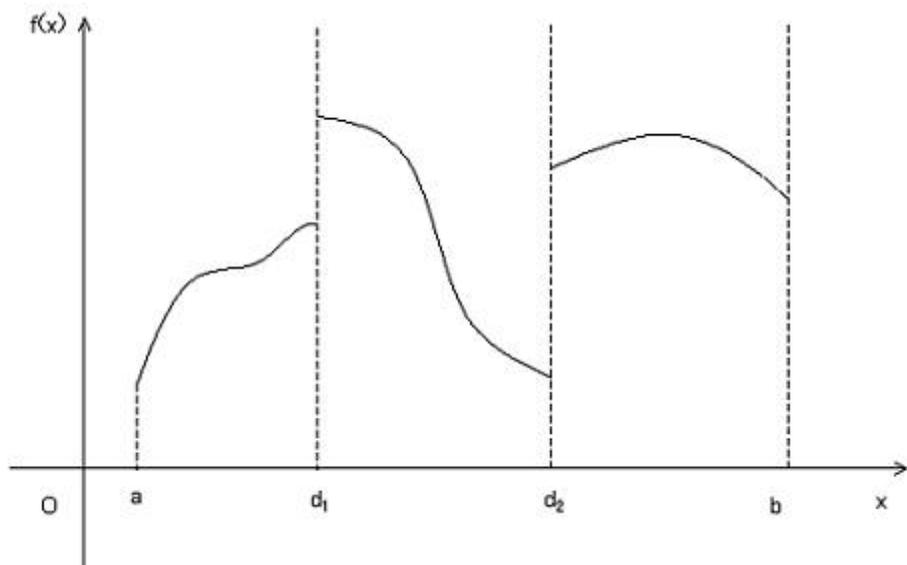
$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx \quad (2)$$

としたとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)) \quad (3)$$

フーリエ級数の収束の証明  
である。



証明  
式(1), (2)より

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x_1) e^{i\frac{2\pi}{L} x_1} dx_1 \right) e^{i\frac{2\pi}{L} x} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x_1) \sum_{n=-N}^N e^{-i\frac{2\pi}{L}(x_1-x)} dx_1 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L-x}^{L-x} f(t+x) \sum_{n=-N}^N e^{-i\frac{2\pi}{L} t} dt \quad (6)$$

( $x_1 - x = t$ )

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t+x) \sum_{n=-N}^N e^{-i\frac{2\pi}{L} t} dt \quad (7)$$

(なぜなら  $f(x)$  は  $e^{-i\frac{\pi}{2L}t}$  で展開しており、周期  $2L$  の周期関数と仮定しているため)

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t+x) \frac{\sin \frac{\pi t}{L} (N + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\pi t}{2L}} dt \quad (8)$$

ここで

$$\sum_{n=-N}^N e^{-i\frac{n\pi}{L}t} = \frac{e^{-i\frac{N\pi}{L}t} - e^{i\frac{(N+1)\pi}{L}t}}{1 - e^{i\frac{\pi}{L}t}} \quad (9)$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2L}(N+\frac{1}{2})} - e^{i\frac{\pi}{2L}(N+1-\frac{1}{2})}}{e^{-i\frac{\pi t}{2L}} - e^{i\frac{\pi t}{2L}}} \quad (10)$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi t}{L} (N + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\pi t}{2L}} \quad (11)$$

を用いた。以上より

$$S_N(x) - \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 (f(t+x) - f(x-0)) \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{n\pi}{L}t} dt \\ + \frac{1}{2L} \int_0^L (f(t+x) - f(x+0)) \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{n\pi}{L}t} dt \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 \frac{f(t+x) - f(x-0)}{\sin \frac{\pi t}{2L}} \sin \frac{\pi t}{L} (N + \frac{1}{2}) dt \\ + \frac{1}{2L} \int_0^L \frac{f(t+x) - f(x+0)}{\sin \frac{\pi t}{2L}} \sin \frac{\pi t}{L} (N + \frac{1}{2}) dt \quad (13)$$

ここで

$$\lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(t+x) - f(x-0)}{\sin \frac{\pi t}{2L}} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(t+x) - f(x-0)}{\left(\frac{\pi t}{2L}\right) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi t}{2L}\right)^3 + \dots} \quad (14)$$

$$= -\frac{2L}{\pi} f'(x-0) \quad : f(x) \text{ は滑らかなため値は有限} \quad (15)$$

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{\sin \frac{\pi t}{2L}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{\left(\frac{\pi t}{2L}\right) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi t}{2L}\right)^3 + \dots} \quad (16)$$

$$= \frac{2L}{\pi} f'(x+0) \quad : f(x) \text{ は滑らかなため値は有限} \quad (17)$$

であるから(13)式は  $N \rightarrow \infty$  のとき次に述べるリーマンの補助定理より0。すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) - \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) = 0 \quad (18)$$

したがって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) \quad (19)$$

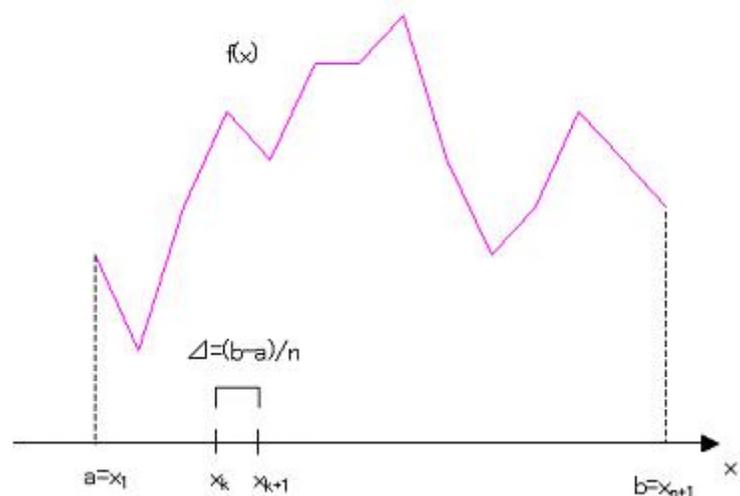
証明終

リーマンの補助定理

$f(x)$  が区間  $[a, b]$  で区分的に連続なとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos Nx dx = 0 \quad (20)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin Nx dx = 0 \quad (21)$$



証明

区間  $[a, b]$  において不連続点  $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$  が存在したとしても、各区間内で  $f(x)$  は連続であるから、はじめから区間  $[a, b]$  において  $f(x)$  は連続としてよい。

$$\left| \int_a^b f(x) \cos Nx dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cos Nx dx \right| \quad (22)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cos Nx dx \right| \quad (23)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k) \cos Nx dx + f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos Nx dx \right| \quad (24)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| dx + \sum_{k=1}^n |f(x_k)| \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos Nx dx \right| \quad (25)$$

$\epsilon$  を任意の正の定数 ( $\epsilon > 0$ ) とすると  $n$  を十分大きい数として

$$\epsilon > |f(x) - f(x_k)| \quad (26)$$

フーリエ級数の収束の証明

となる  $x, x_k$  がとれる。また  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$  とすると (25) 式は

$$(25) \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \epsilon dx + \sum_{k=1}^n M \left| \frac{1}{N} [\sin Nx]_{x_k}^{x_{k+1}} \right| \quad (27)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \epsilon \frac{b-a}{n} + \frac{M}{N} \sum_{k=1}^n |\sin Nx_{k+1} - \sin Nx_k| \quad (28)$$

$$\leq \epsilon(b-a) + \frac{2nM}{N} \quad (29)$$

$\epsilon > \frac{2nM}{N}$  が成り立つように  $N$  をとると

$$< \epsilon(b-a) + \epsilon \quad (30)$$

$$= \epsilon(b-a+1) \quad (31)$$

$\epsilon \rightarrow 0$  のとき  $N \rightarrow \infty$  であるから

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(x) \cos Nx dx \right| = 0 \quad (32)$$

したがって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos Nx dx = 0 \quad (33)$$

同様に

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin Nx dx = 0 \quad (34)$$

証明終

参考文献、WEBページ

<http://www9.ocn.ne.jp/~hkato111/fourier2/fourier2.html>

2008/02/22

フーリエ級数の収束の証明

1. 理工系の基礎数学 [フーリエ解析](#) 福田礼次郎 岩波書店
2. [区分的に連続な関数、区分的になめらかな関数の定義](#) ( - Security Akademeia - )

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

## ギブス現象

前回は区分的に滑らかな関数についてフーリエ級数がもとの関数  $f(x)$  に収束することを証明しました。ところが不連続点ではもとの関数に収束しない点が存在することが知られています。これはギブス現象と呼ばれ、約9%のズレが発生します。具体的に不連続な関数のフーリエ級数を計算し、状況を確認してみましょう。

具体的な関数として

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & -L \leq x \leq 0 \\ & d & -L \leq x \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

を考えます。このとき

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx = \frac{id}{2n\pi} \left( (-1)^n - 1 \right) \quad n \neq 0 \quad (2)$$

$$c_0 = \frac{d}{2} \quad n = 0 \quad (3)$$

したがって

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{id}{2n\pi} \left( (-1)^n - 1 \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{d}{2} \quad (4)$$

$$= \frac{2d}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{L}x + \frac{d}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{2d}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{L}x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{L}x + \dots \right) + \frac{d}{2} \quad (6)$$

以下では収束しない点でのフーリエ級数の値を求めます。飛びが発生しているところは  $f(x)' = 0$  であるため

$$f(x)' = \frac{2d}{L} \left( \cos \frac{\pi}{L} x + \cos \frac{3\pi}{L} x + \cos \frac{5\pi}{L} x + \dots \right) \quad (7)$$

ここで

$$S_{2m+1} = e^{i\frac{\pi}{L}x} + e^{i\frac{3\pi}{L}x} + \dots + e^{i\frac{(2m+1)\pi}{L}x} \quad (8)$$

とし、両辺に  $e^{i\frac{2\pi}{L}x}$  をかけて辺々引くと

$$\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right) S_{2m+1} = e^{i\frac{\pi}{L}x} - e^{i\frac{(2m+3)\pi}{L}x} \quad (9)$$

$$S_{2m+1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{L}x} - e^{i\frac{(2m+3)\pi}{L}x}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{L}x}} \quad (10)$$

$$= \frac{\left(1 - e^{i\frac{2(m+1)\pi}{L}x}\right) i \sin \frac{\pi}{L} x}{1 - \cos \frac{2\pi}{L} x} \quad (11)$$

$f(x)' = \frac{2d}{L} \operatorname{Re} S_{2m+1} (m \rightarrow \infty)$  および  $f(x)' = 0$  より

$$f(x)' = \frac{2d}{L} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2(m+1)\pi}{L} x \sin \frac{\pi}{L} x}{1 - \cos \frac{2\pi}{L} x}$$

$$= 0$$

$$x = \frac{kL}{2(m+1)}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

(∵ ロピタルの定理より)

$x=0$  にもっとも近い  $x$  は

$$x = \pm \frac{L}{2(m+1)} \quad (13)$$

このとき

$$f\left(\pm \frac{L}{2(m+1)}\right) = \frac{2d}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{L} \frac{\pm L}{2(m+1)} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{L} \frac{\pm L}{2(m+1)} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{L} \frac{\pm L}{2(m+1)} + \dots \right) + \frac{d}{2} \quad (14)$$

$$= \pm \frac{d}{\pi} \frac{\pi}{m+1} \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2(m+1)}} \sin \frac{\pi}{2(m+1)} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2(m+1)}} \sin \frac{3\pi}{2(m+1)} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2(m+1)}} \sin \frac{5\pi}{2(m+1)} + \dots \right) + \frac{d}{2} \quad (15)$$

$m \rightarrow \infty$  のとき、上式は

$$(15) = \pm \frac{d}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{d}{2} \quad (16)$$

$$\Delta x = \frac{\pi}{m+1}$$

$$= \pm \frac{d}{\pi} \left( \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) + \frac{d}{2} \quad (17)$$

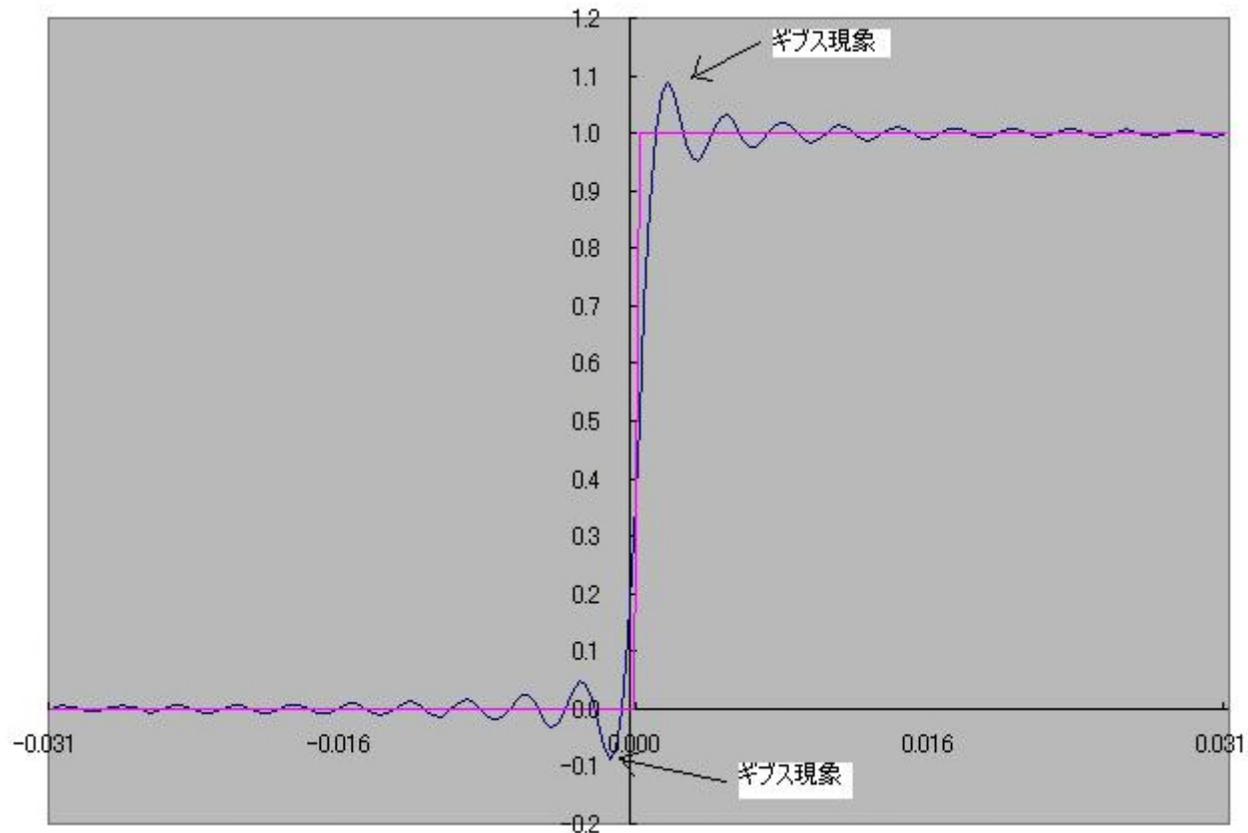
$$= \pm \frac{d}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) + \frac{d}{2} \quad (18)$$

$$= \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \mp \frac{d}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (19)$$

ここで

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -0.089 \quad (20)$$

したがって飛びの量は約8.9%である。実際に上記フーリエ級数をもとにExcelでグラフを書くと下記のようなになる。(ポイント数は1024)



ギブス現象は前回の証明に違反しないのかという疑問については、違反はしないと言えます。理由は、前回の証明で収束を問題にしていたのは連続な関数のある固定した点  $x$  であり、ギブス現象の突起の点は  $m \rightarrow \infty$  で  $0$  に限りなく近づいていくため、前回の証明方法ではこの現象はとらえられないためです。(もともと不連続点については何も言っていないのもあります)

参考文献 理工系の基礎数学 [フーリエ解析](#) 福田礼次郎 著 岩波書店

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

## サンプリング定理

「信号はその最大周波数の2倍の周波数でサンプリングすれば、サンプリング後の不連続な信号から元の連続的な信号を再現することができる」という定理があります。

(サンプリング定理)

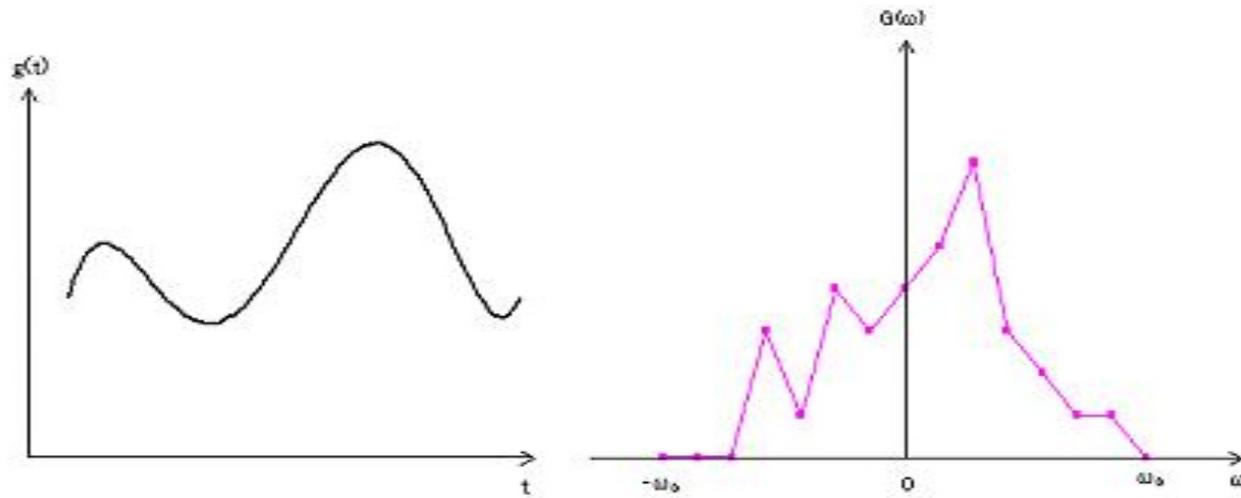
これを示すためにフーリエ変換を使用します。フーリエ変換の式を思い出して見ましょう。任意の関数  $f(x)$  は区間  $-L \leq x \leq L$  の区間において以下のよう  
に表されます。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{2L}x} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{2L}x} dx \quad (2)$$

ところで信号  $g(t)$  の角周波数 (絶対値) の最大値を  $\omega_0$  とすると信号の周波数成  $G(\omega)$  のグラフはたとえばのようになります。

(  $\omega < -\omega_0, \omega_0 < \omega$  で  $G(\omega) = 0$  )



この  $G(\omega)$  を区間  $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$  の範囲でフーリエ級数展開すると

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i \frac{2\pi n}{2\omega_0} \omega) \quad (3)$$

$$C_n = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} G(\omega) \exp(-i \frac{2\pi n}{2\omega_0} \omega) d\omega \quad (4)$$

また元の信号  $g(t)$  はフーリエ積分表示で

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} G(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (5)$$

$$(-\infty < t < \infty) \quad (6)$$

と表されるため

$$g(-\frac{\pi n}{\omega_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} G(\omega) \exp(-i\omega \frac{\pi n}{\omega_0}) d\omega \quad (7)$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} C_n \quad (8)$$

$$\therefore C_n = \frac{\pi}{\omega_0} g\left(-\frac{\pi n}{\omega_0}\right) \quad (9)$$

よって  $G(\omega)$  は

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} g\left(-\frac{\pi n}{\omega_0}\right) \exp\left(i \frac{\pi n}{\omega_0} \omega\right) \quad (10)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} g\left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right) \exp\left(-i \frac{\pi n}{\omega_0} \omega\right) \quad (11)$$

したがって  $g(t)$  は

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} g\left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right) \exp\left(-i \frac{\pi n}{\omega_0} \omega\right) \right] \exp(i\omega t) d\omega \quad (12)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right) \frac{\sin(\omega_0 t - \pi n)}{\omega_0 t - \pi n} \quad (13)$$

$$(\omega_0 = 2\pi f_0) \quad (14)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2f_0}\right) \frac{\sin(2\pi f_0 t - \pi n)}{2\pi f_0 t - \pi n} \quad (15)$$

以上より元の信号  $g(t)$  は周期  $\frac{n}{2f_0}$  でサンプリングした離散的な信号の値  $g\left(\frac{n}{2f_0}\right)$  がわかれば再現できます。これがシャノン-染谷のサンプリング定理です。2倍の周波数  $2f_0$  が現れてくる理由は最大角周波数  $\omega_0$  にあります。

参考文献 PCM通信の基礎と新技術 猪瀬博/編 産報

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

[Next](#) [Up](#) [Previous](#)

## サンプリング定理2

前記の「[サンプリング定理](#)」では「信号はその最大周波数の2倍の周波数でサンプリングすれば、サンプリング後の不連続な信号から元の連続的な信号を再現することができる」を述べましたが、自分はピンとこなかったため、 $g(t)$ の周波数空間での値を確認してみます。

そのためにデルタ関数 ( $\delta$  関数) を導入します。

### (1) $\delta$ 関数

$\delta$  関数は物理学者のディラックが量子力学を議論する際に導入した関数です。具体的には  $x = 0$  で  $\infty$ 、それ以外の点では0の値を持ちます。

$$\delta(x) = \infty, \text{ when } x = 0 \quad (1)$$

$$0, \text{ when } x \neq 0 \quad (2)$$

このデルタ関数は、イメージ的にはx軸方向の幅はaで

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \quad (3)$$

という関数を思い浮かべればよいと思います。また積分表示では

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (4)$$

上式は座標をaだけずらすと

$$\delta(x - a) = \infty, \text{ when } x = a \quad (5)$$

$$0, \text{ when } x \neq a \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a) \quad (7)$$

と表されます。 $\delta$  関数はフーリエ積分により次式であらわすこともできます。(フーリエ積分の式に当てはめれば出てきます)

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad (8)$$

またサンプリングの際必要になる周期  $T_s$  の  $\delta$  関数を  $\delta_s$  とすると

$$\delta_s(x) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_s t} \quad (9)$$

$$c_n = \frac{1}{T_s} \quad (10)$$

$$\omega_s := \frac{2\pi}{T_s} \quad (11)$$

そのフーリエ変換は上の(8)および(9)より

$$\Delta_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

$$= \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (13)$$

となります。

## (2) サンプリング信号のフーリエ変換

信号  $g(t)$  のサンプリング後の信号  $g_s(t)$  は次のようにあらわすことができます。(図1参照)

$$g_s(t) = g(t)\delta_s \quad (14)$$

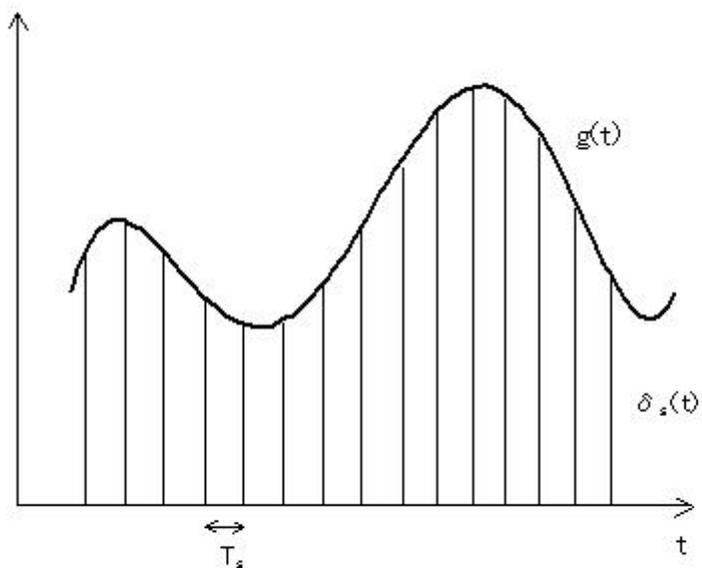


図1

これは単位時間1が非常に微小のとき

$$g(t)\delta_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_s n) dt \quad (15)$$

$$= g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_s n) 1 \quad (16)$$

$$= g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_s n) \quad (17)$$

と書けるためです(推定)。

したがって  $g_s(t)$  のフーリエ変換  $G_s(\omega)$  は

$$G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta_s(t)e^{-i\omega t}dt \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2\pi}G(\omega) * \Delta_s(\omega) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s - x)dx \quad (20)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2\pi}G(\omega - n\omega_s) \quad (21)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}G(\omega - n\omega_s) \quad (22)$$

ここで  $G(\omega) * \Delta_s(\omega)$  は  $G(x)$  と  $\Delta_s(x)$  の畳み込み積分で

$$G * \Delta_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\Delta(\omega - x)_s dx \quad (23)$$

で定義されます。したがって信号  $g(t)$  の最大周波数を  $\omega_0$  としたとき、サンプリング周波数  $\omega_s$  を

$$\omega_s \geq \omega_0 \quad (24)$$

とすると、 $G_s(\omega)$  のグラフは図2のようになり、

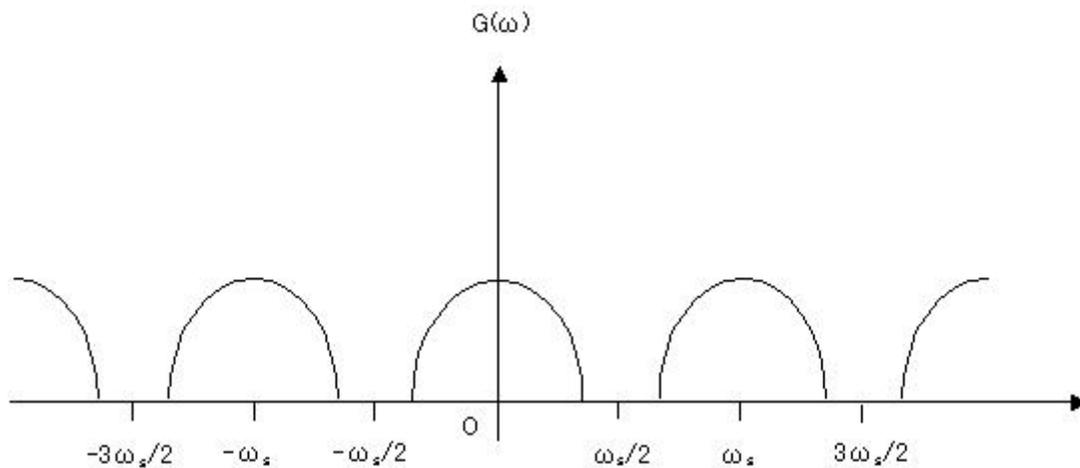


図2

のようなフィルタを掛け合わせると

$$H(\omega) = T_s, \text{ when } -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (25)$$

$$0, \text{ when } \omega < -\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2} < \omega \quad (26)$$

$$G_s(\omega)H(\omega) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} G(\omega - n\omega_s) \right) H(\omega) \quad (27)$$

$$= G(\omega) \quad (28)$$

より原信号の周波数成分  $G(\omega)$  が得られます。

もし  $\omega_0 \geq \frac{\omega_s}{2}$  の場合は図3のように信号の周波数成分が重なりあってしまい、 $H(\omega)$ をかけても得られる信号は  $G(\omega)$  とは異なってしまいます。したがって  $G(\omega)$  を得るためには、サンプリング周波数は最小でも原信号の最大周波数の2倍である必要があることがわかります。

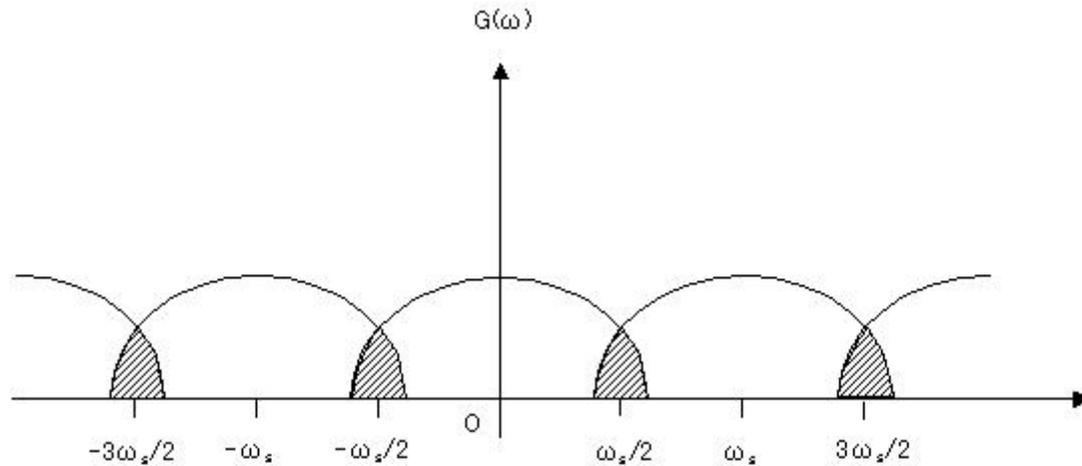


図3

参考文献

大学課程 情報通信工学 寺田、木村、吉田、岡田、佐藤 共著 オーム社  
 量子力学 ディラック著、朝永、玉木、木庭、大塚、伊藤 共訳 岩波書店 p.78

## 参照サイト

[奥村 晴彦 先生 サイトマップ](#) 評判では”日本で最もまともな情報があるサイト”とのこと。

[最初から説明する Inside MP3](#)

日本語でのMP3についてのページでは恐らく最も詳しいサイトですが削除されています。(060129確認) コピーが保存されています。[ハングアップの日々](#) [K.Takata](#)さんが書いておられました。

**相対論と電磁気** 片山泰男(Yasuo Katayama) さん

ISO MPEG1規格会合での様子も記載されています。

[デジタルフィルタと逆フィルタ](#) 3/4 2005

[MPEG Video 技術\(1993年\)](#) 3/13 2002

[インターネット MPEG\(1997年\)](#) 3/27 2002

[MPEG-2の技術修正と MPEG-4\(1994年\)](#) 3/13 2002

## 日本音響学会

音のなんでもコーナー Q&A

[Q:携帯オーディオ\(MP3など\)やインターネット音楽配信にはどのような技術が使われていますか?また、著作権との関係はどうなのでしょう?](#)

[Q: CDのサンプリング周波数の44.1\[kHz\]は、DATの48\[kHz\]に比べて中途半端な値という印象を持ちますが、これらはどのような経緯で決定されたのですか?世界的指揮者カラヤンの第9を全曲CDに入れるために決定されたという噂は本当ですか。また、CDとして提供されている音楽音源はすべて44.1\[kHz\]サンプリングで録音されているのですか。あるいは高サンプリングで録音したものを変換しているのでしょうか?](#)

[Q:音に関係する規格\(国際規格や国内規格\)は、どのようなところで決められるのですか?](#)

[MP3' Tech Technical audio papers](#) MP3プログラミングに関する技術的な資料も多く載せてあります。(英語)

[Speech / Audio Coding and Processing](#)

[The MPEG Audio Web Page](#)

[UZURA3: MPEG1/LayerIII Encoder in FORTRAN90](#)

[hydrogen audio](#) [MP3などに興味のある方が書き込みするサイト。\(英語\)](#)

## 論文検索

[IEEE Xplore](#)

IEEEの論文がダウンロード可能。

年会費\$116+Digital Library \$420(=\$35/月×12ヶ月)が1年間で必要。

IEEEへの入会の後、WEB Accountを作成し、それによって

Xploreページにアクセス可能。

[NACSIS Webcat](#)

全国の大学図書館等所蔵の本や雑誌を検索。時々自分も大学の図書館でコピーさせてもらっています。

[情報処理学会 電子図書館 オンデマンドサービス](#)

[電子情報通信学会和文論文誌 \(IEICE\)](#)

## 論文

[Adaptive filtering in subbands with critical sampling: analysis, experiments, and application to acoustic echo cancellation](#)

Gilloire, A. Vetterli, M.

[Aliasing reduction in sub-bands of cascaded filter banks with decimation](#)

Edler, B.

[Polyphase Quadrature Filters](#) [icassp83\\_27-2.pdf](#)参照

Mr. Joseph Rothweiler

[Polyphase IIR Filter Banks for Subband Adaptive Echo Cancellation Applications](#)

Artur Krukowski and Izzet Kale

[Near-Perfect -Reconstruction Pseudo-QMF Banks](#)

Truong Q. Nguyen

[Audio Compression using Modified Discrete Cosine Transform: The MP3 Coding Standard \\*\\*\\*\\*](#)

Joebert S. Jacaba

link1

[A general Formulation of Modulated Filter Banks](#)

Tanja Karp and Truong Q. Nguyen

[A Tutorial on MPEG/Audio Compression](#)

Davis Pan

[A Method For Alias Reduction in Cascaded Filter Banks](#) リンク切れ

Gerald Schuller, Bernd Edler and Adele Doser Oct 15-18, 2000

[Filter Bank Design for Digital Speech Signal Processing Methods and Applications](#)

Jan Mark de Haan

[The Theory Behind Mp3](#)

Rassol Raissi in December 2002

[The Design of a Hybrid Filter Bank for the Psychoacoustic Model in ISO/MPEG Phase 1,2 Audio Encoder](#)

Chi-Min Liu and Wen-Chieh Lee リンク切れ

[Design and Implementation of an MPEG-1 Layer III Audio Decoder](#)

Krister Lagerstrom リンク切れ

[MPEG Digital Audio Coding Standards](#)

Peter Noll

[Real-Time Implementation of MPEG- Layer 3 Audio Decoder on a DSP Chip](#)

Hung-Chih Lai リンク切れ

[MPEG Audio Layer3のエンコーダの高速化処理に関する研究](#)

李 芝剛

Perfect Reconstruction Conditions for Adaptive Blocksize MDCT

Takashi Mochizuki 望月 孝志 さん 1994

→[電子情報通信学会和文論文誌 \(IEICE\)](#) より検索が必要

[e6820](#) speech and audio processing and recognition spring 2002 MDCTの論文

## OggVorbis

link1

[xiph.org home](http://xiph.org/home) OggVorbisなどを開発している団体  
[OggVorbis ファイル仕様\(公式\)](#) 仕様についての詳細な説明  
[vorbis-dev@xiph.org mailing list](mailto:vorbis-dev@xiph.org) 開発者の方向けのメーリングリスト(2004/6~)  
2004/5までのメーリングリストは[こちら](#)

[Ogg村](#)

## 信号処理

信州大学工学部情報工学科 井澤先生 [大学、大学院での講義内容の解説](#)  
信州大学 [インターネット大学院](#)

## 数学

「さん 微分積分、複素関数、フーリエ級数などを親切に説明されています。  
同志社大学工学部電気系応用数学研究室 近藤先生 [テイラー級数](#)  
複素関数 Keith Wright氏 Adaptive block size MDCTでの[数学](#)  
[Weekend Mathematics](#) (Junko Kojimaさんのページ) [ジョルダンの不等式](#)を参考にさせていただきました。



## 波形解析

[efuさんのページ](#)  
録音も出来る 高速リアルタイム スペクトラムアナライザ (ASIO対応) [WaveSpectra](#)  
CD-DA やオーディオのチェック用 テスト信号発生ソフト (ASIO対応) [WaveGene](#)  
実際の波形を見ることができて非常に参考になります。

[株式会社 テクノマセマティカル](#)

[HOME](#)

## 参考文献

### 解説書

[Windowsサウンドプログラミング](#)

[コンピュータミュージック](#)

[改訂版 デジタル放送教科書 上 MPEG-1/2/4~H.264/AVC](#)

[ポイント図解式 標準 ブロードバンド+モバイル MPEG教科書](#)

[解体新書 画像・音声処理技術 マルチメディアの基礎からMPEGまで](#)

[未来ねっと技術シリーズ デジタル音声・オーディオ技術](#)

[基礎から学ぶ情報圧縮技術](#)

[マルチメディアとデジタル信号処理](#)

[実践 MPEG教科書](#)

[デジタル放送・インターネットのための情報圧縮技術](#)

[音声符号化](#)

[トリケップス 文献調査用資料 CD-Rサービスの御案内](#) → MPEG技術

### ソフトウェア

[VisualC++6.0でつくるMP3Playerプログラミング](#)

[サウンド圧縮テクニカルガイド](#)

## 数学

[デジタル信号処理 基礎から応用](#)

[z変換入門](#)

[デジタル信号処理](#)

[情報源符号化](#)

[マルチメディア技術の基礎 DCT\(離散コサイン変換\)入門](#)

[よくわかるデジタル画像処理 フィルタ処理からDCT&ウェーブレットまで](#)

[数学セミナー 符号の数理](#)

[例にもとづく情報理論入門](#)

[デジタル信号処理の基礎 はじめて学ぶデジタルフィルタとFFT](#)

[デジタル信号処理](#)

[音響・音声工学](#)